Μαθημα 16ο No. Date 15/4/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

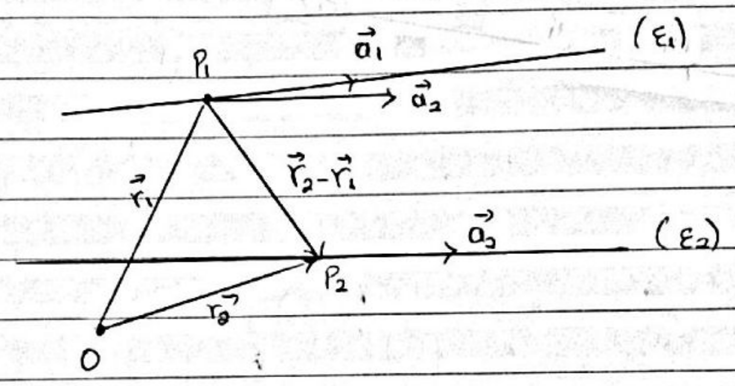
Ορισμος

Δυο ευθειες λεγονται συμβατες, αν υπαρχει επιπεδο το οποιο να τις περιεχει. Αν δεν υπαρχει, τοτε αυτες καλουνται ασυμβατες

Ευρεση συνθηκης (για να ειναι δυο ευθειες συμβ.)

$(\varepsilon_1): \vec{r} = \vec{r_1} + \lambda \cdot \vec{a_1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(\varepsilon_2): \vec{r} = \vec{r_2} + \lambda \cdot \vec{a_2}$



$\Leftrightarrow$ (ε_1) συμβ. (ε_2) $\Leftrightarrow$ τα $\vec{r_2}-\vec{r_1}$, $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ ειναι συνεπιπεδα

$\Leftrightarrow (\vec{r_2}-\vec{r_1}, \vec{a_1}, \vec{a_2}) = 0$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{r_2}-\vec{r_1} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \Leftrightarrow$

$\vec{a_1} = (a_1, b_1, \gamma_1)$

$\vec{a_2} = (a_2, b_2, \gamma_2)$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

π.χ

$(\varepsilon_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ με $\vec{a_1} = (2,3,1)$

$(\varepsilon_2): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ με $\vec{a_2} = (3,2,2)$

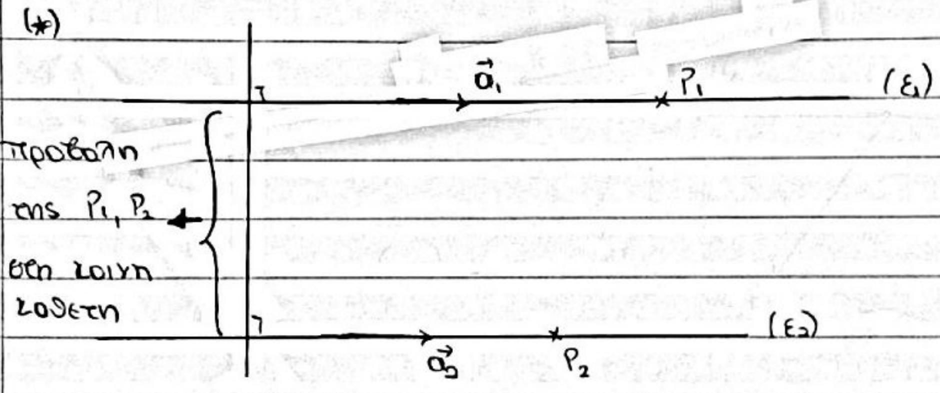
το $P_1(-1,0,1) \in (\varepsilon_1)$
το $P_2(0,1,0) \in (\varepsilon_2)$

$\Rightarrow \vec{P_1P_2} = (\vec{r_2}-\vec{r_1}) = (0-(-1),\ 1-0,\ 0-1) = (1,1,-1)$

Ελεγχος της $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix} = 8 \neq 0$

$\Rightarrow$ οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ ασυμβατες

(*)



$(\varepsilon_1): \vec{r} = \vec{r_1} + \lambda\cdot\vec{a_1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Εστω $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ ασυμβατες. Θελουμε
$(\varepsilon_2): \vec{r} = \vec{r_2} + \lambda\cdot\vec{a_2}$ να βρουμε την ελαχιστη αποσταση αυτων.

Προβαλ. τα P_1, P_2 στην κοινη καθετο των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$. Το μετρο αυτης της προβολης ειναι η ζητουμενη αποσταση.

$$\left\{ \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{a},\vec{a}\rangle}\cdot\vec{a} \right\}$$

Παρατ. οτι $\vec{a_1}\parallel(\varepsilon_1)$, $\vec{a_2}\parallel(\varepsilon_2)$ και $\left.\begin{matrix}\vec{a_1}\times\vec{a_2}\perp\vec{a_1}\parallel(\varepsilon_1)\\ \vec{a_1}\times\vec{a_2}\perp\vec{a_2}\parallel(\varepsilon_2)\end{matrix}\right\}$ το $\vec{a_1}\times\vec{a_2}$ ανηκει στη κοινη καθετο των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

Άρα η ζητ. απόσταση είναι

$$d = \left| \pi\rho o\beta_{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2} (\underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{\overrightarrow{P_1P_2}}) \right| = \left| \frac{\langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 , \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \rangle}{\langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 , \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \rangle} \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \right| =$$

$$= \left| \frac{(\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|^2} \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \right| = \left| \frac{(\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \right| \cdot \underbrace{\left| \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \right|}_{\text{μοναδιαίο!}} =$$

$$= \left| \frac{(\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \right|$$

Συνέχεια του πχ

$$(\varepsilon_1) \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$$

$$(\varepsilon_2) \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$$

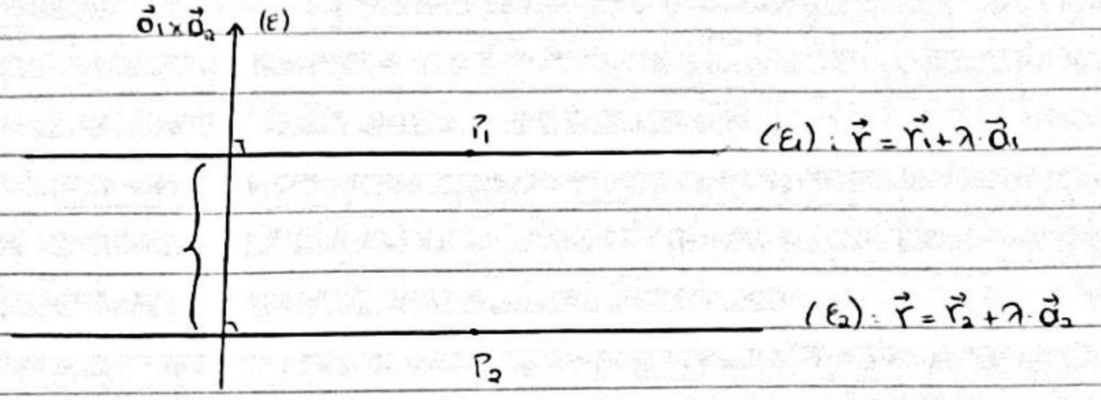
Έχουμε βρει ότι $(\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 8$

Μένει το $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4, -1, -5) \Rightarrow |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{42}$$

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{8}{\sqrt{42}}$$

Ευρεση κοινης καθετου δυο ασυμβατων ευθειων



Χρειαζομαστε διανυσμα παραλληλο στην (ε) (ειναι το $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$)
και σημειο της (ε)
Θεωρουμε το επιπεδο (π) το οποιο

(i) περιεχει την (ε_2)
(ii) ειναι παραλληλο στο $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$
$\Rightarrow$ η (ε) ανηκει σε αυτο

$\Rightarrow$ η τομη του (π) με την ευθεια (ε_1) ειναι σημειο της κοινης καθετου

Δηλαδη

$P_2=(x_2,y_2,z_2)$ σημειο του (π)

(π): περιεχει την (ε_2) $\quad \vec{a}_2 \,//\, (\pi)$
και $\quad \vec{a}_1\times\vec{a}_2 \,//\, (\pi)$

$$\Rightarrow (\pi): \begin{vmatrix} \overbrace{x-x_2 \quad y-y_2 \quad z-z_2}^{\vec{r}-\vec{r}_2} \\ \text{---} \quad \vec{a}_2 \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \vec{a}_1\times\vec{a}_2 \quad \text{---} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \overbrace{(\vec{r}-\vec{r}_2,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_1\times\vec{a}_2)}^{\text{μεικτο γινομενο}}=0$$

$(\varepsilon_1): \vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\cdot\vec{a}_1$, $(\pi): (\vec{r}-\vec{r}_2,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_1\times\vec{a}_2)=0$

$$\overset{\text{τομη}}{\Longrightarrow} (\underbrace{\vec{r}_1}_{\text{σημειο } P_1}+\lambda\vec{a}_1-\underbrace{\vec{r}_2}_{\text{σημειο } P_2},\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_1\times\vec{a}_2)=0$$

Επιπλεον $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ γνωστα. Αρα το μονο αγνωστο που εχω ειναι το λ το οποιο και θα βρω

$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|^2$

$\Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2) + \lambda(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|^2}$

σημειο κοινης καθετου

Αρα οπο ⊛ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ αρα $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{\beta} = \dfrac{z-z_0}{\gamma}$

$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (a, \beta, \gamma)$

Η ευθεια στο επιπεδο {π.χ Oxy}

$\Updownarrow$

$z=0$ (Δεν υπαρχει το z για αυτο z=0)

Εφαρμογη

Εξισωση της (ε): $\dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{\beta}$, $z=0$

οπου, το $P_1(x_1, y_1, (0))$ $\Rightarrow$ στο Oxy συμβ

$\vec{a} = (a, \beta, 0)$ $\quad P_1(x_1, y_1)$, $\vec{a} = (\alpha, \beta) \parallel (\varepsilon)$

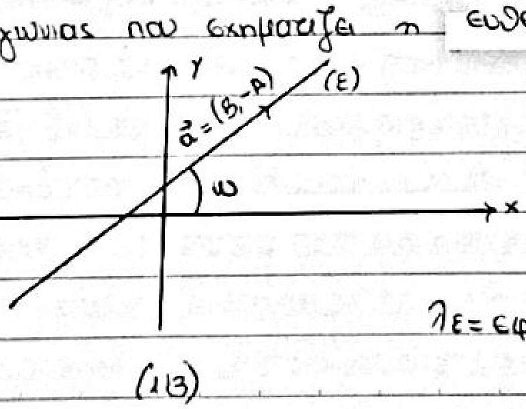
Ορισμος

Συντελεστης διευθυνσης ενος διανυσματος $\vec{a} = (\alpha, \beta)$ λεγεται ο αριθμος $\lambda = \dfrac{\beta}{a}$, $(a \neq 0)$

- Αν $a = 0 \Rightarrow \lambda = \infty$

Γεωμετρικα

Ο συντελεστης διευθυνσης μιας ευθειας (ε) οριζεται ως η εφαπτομενη της γωνιας που σχηματιζει η ευθεια με τον αξονα Ox



$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega$

Εστω ευθεια

$$\left.\begin{array}{l|l} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} & , \cancel{z} \, 0 \\ \dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{\beta} & , \cancel{z} \, 0 \end{array}\right\}$$

$Ax+By+\Gamma=0$

οπου $(A,B) \neq (0,0)$

$\left\{ Ax+By+\overset{\rightarrow 0 \text{ λογω } z=0}{\Gamma z}+\Delta=0 \right\}$

Το διανυσμα $(A,B) \perp (\varepsilon)$

↳ καθετο στο επιπεδο ⇒ αρα καθετο στην (ε) που ανηκει στο επιπεδο

Παρατηρουμε οτι $(B,-A) \perp (A,B)$ αφου $(B,-A)\cdot(A,B)=0$

Συνεπως $(B,-A) \parallel (\varepsilon)$

$\Rightarrow \lambda(\varepsilon) = \lambda(B,-A) \overset{\text{οριб.}}{=\!=} \dfrac{-A}{B}$ αρα η $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$

Εχει συντελεστη διευθυνσης $\lambda(\varepsilon) = -\dfrac{A}{B} = \varepsilon\varphi\omega$

Εχει εννοια μονο οταν το $B \neq 0$

{ οχι παραλ. με τον αξονα Oy }

Συνεπως η εξισωση ευθειας στο Oxy: $y-y_1=\lambda(x-x_1)$

{οπου λ ο συντελεστης διευθυνσης της ευθειας}

$\lambda(\varepsilon) = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$\left\{ (\varepsilon): \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{εξ. ευθ.} \right\}$$

No. Date

$\Rightarrow \lambda(\varepsilon_1) = \lambda(B_1, -A_1) \overset{\text{op}}{=} \dfrac{-A_1}{B_1}$ $\quad (\varepsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$

$\lambda(\varepsilon_2) = -\dfrac{A_2}{B_2}$ $\quad (\varepsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \parallel (\varepsilon_1)$

$(\varepsilon_2) \parallel \overrightarrow{P_1'P_2'} = (x_2' - x_1', y_2' - y_1')$

Αν $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in (\varepsilon_1) \rightarrow \lambda(\varepsilon_1) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$P_1'(x_1', y_1'), P_2'(x_2', y_2') \in (\varepsilon_2) \rightarrow \lambda(\varepsilon_2) = \dfrac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{P_1'P_2'} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{P_1'P_2'} \Rightarrow$

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \lambda(x_2' - x_1', y_2' - y_1') \Rightarrow \lambda(\varepsilon_1) = \lambda(\varepsilon_2) \Rightarrow \underbrace{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}}$

ικανη και αναγκαια
συνθηκη για $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$

και αντιστροφα αν (ε_1) εχει ιδιο συντελ διευθυνση με $(\varepsilon_2) \Rightarrow \lambda\varepsilon_1 = \lambda\varepsilon_2$

$\Rightarrow -\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{A_2}{B_2} \Rightarrow \dfrac{-A_1}{-A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ $\Rightarrow$ τα διανυσματα

$(B_1, -A_1), (B_2, -A_2)$ ειναι παραλληλα

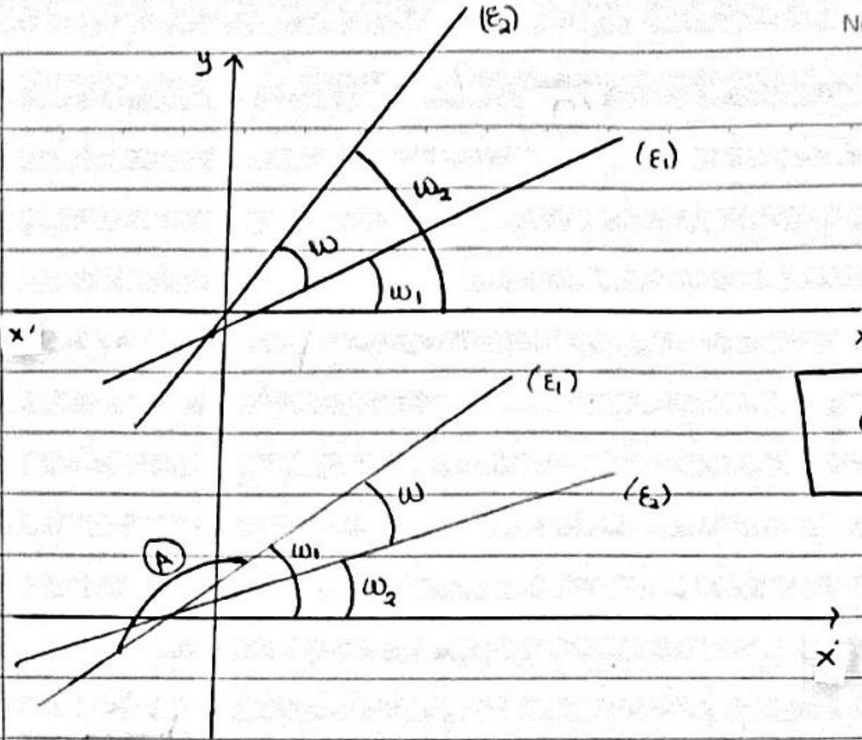
$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_1: A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0 \\ \varepsilon_2: A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0 \end{array}}$

Ειδαμε $\left.\begin{array}{l} (B_1, -A_1) \parallel (\varepsilon_1) \\ \text{και } (B_2, -A_2) \parallel (\varepsilon_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$

$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$: $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \perp (\varepsilon_1) \\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \perp (\varepsilon_2) \end{array}\right\}$ $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow$

$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \overset{B_1 B_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} A_1 A_2 = -B_1 B_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{(-A_1) A_2}{B_1 B_2} = -1 \Rightarrow \dfrac{-A_1}{B_1} \cdot \dfrac{-A_2}{B_2} = -1 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_1) \cdot \lambda(\varepsilon_2) = -1$



$$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\pi+\omega)}$$

Θελουμε να προσδιορισουμε την εφω. Εστω ω_1, ω_2 οι γωνιες των (ε_1), (ε_2) με τον αξονα Ox $\Rightarrow$ $\omega=\omega_2-\omega_1$ $\Rightarrow$

$$\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\omega_2-\omega_1) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\varepsilon\varphi\omega_2-\varepsilon\varphi\omega_1}{1+\varepsilon\varphi\omega_1\cdot\varepsilon\varphi\omega_2} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\lambda(\varepsilon_2)-\lambda(\varepsilon_1)}{1+\lambda(\varepsilon_1)\cdot\lambda(\varepsilon_2)}$$

$$\varepsilon\varphi(\pi-(\omega_1-\omega_2))=\varepsilon\varphi(\pi+(\omega_2-\omega_1))=\varepsilon\varphi(\omega_2-\omega_1)$$

{ Οπως και να βαλω τις δυο ευθειες ο τυπος δεν αλλαζει και δεν βαζω απολυτο για αυτο }

– Αν (ε_1), (ε_2) ευθειες $\Rightarrow$ και $\hat{\omega}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ $\Rightarrow$ $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\lambda(\varepsilon_2)-\lambda(\varepsilon_1)}{1+\lambda(\varepsilon_1)\cdot\lambda(\varepsilon_2)}$

$\Rightarrow$
- $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \iff \omega=0$ ή $\omega=\pi \iff \varepsilon\varphi\omega=0 \iff \lambda(\varepsilon_1)=\lambda(\varepsilon_2)$ $\oplus$
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \omega=\pm\frac{\pi}{2} \iff$ δεν οριζεται η εφω $\iff 1+\lambda(\varepsilon_1)\cdot\lambda(\varepsilon_2)=0$ $\iff \lambda(\varepsilon_1)\cdot\lambda(\varepsilon_2)=-1$

$$\oplus \iff \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

No. Date

(*) Υποθέτουμε ότι
$$(\Sigma)\begin{cases}(\varepsilon_3): A_3x+B_3y+\Gamma_3=0\\ (\varepsilon_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1=0\\ (\varepsilon_2): A_2\cdot x+B_2\cdot y+\Gamma_2=0\end{cases}$$

(συμβιβαστό)

SOS Οι τρεις ευθείες διέρχονται από κοινό σημείο $\Leftrightarrow$ το (Σ) έχει λύση $\Leftrightarrow r(A)=r(A|B)$

Έστω ότι αυτή η 2×2 ορίζουσα $\neq 0$ — Εμφανίζεται και εδώ

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{bmatrix},\quad A|B=\left[\begin{array}{cc|c}A_1 & B_1 & -\Gamma_1\\ A_2 & B_2 & -\Gamma_2\\ A_3 & B_3 & -\Gamma_3\end{array}\right]$$

θέλω μια ορίζουσα 2×2 διάφορη του μηδενός για να έχω λύση

Δεν υπάρχει 3×3 που να την ξεπερνάει οπότε υποχρεωτικά

Έχουμε λύση αν $\exists$ 2×2 ορίζουσα στον $A\neq 0 \Leftrightarrow r(A)=2$

Θέλουμε $r(A|B)=2 \Leftrightarrow$
$$\underbrace{\begin{vmatrix}A_1 & \cdots\\ A_2 & \cdots\\ A_3 & \cdots\end{vmatrix}=0}_{\text{Συνθήκη για να έχουν 3 ευθείες κοινό σημείο τομής}}$$